m-мерной гиперполосы H_m^r ранга r многомерного проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград,1975, с.102-142.

4.В а с и л я н М,А. Проективная теория многомерных гиперполос.-ДАН Арм.ССР,Матем.,1971,т.6,№6,с.477-481.

5.С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы.-Изв.вузов.Матем.,1975,№10, с.97-99.

6.О л о н и ч е в П.И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос.ДАН СССР,т.80,№2,1951, с.165-168.

7.Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. Докл.АН Арм.ССР,1959,28,№4,с.151-157.

8.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л.,Гостехиздат,1957.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

М.В.К р е т о в

СВОЙСТВА СВЯЗНОСТЕЙ,ПОРОЖДЕННЫХ КОМПЛЕКСАМИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n продолжается изучение комплексов (n-параметрических семейств) K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q [1].Распространяется понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности расслоения линейных реперов [2],[3] на случай главного расслоения $G_{n^2-n+1}(K_n)$,базой которого является комплекс K_n ,а типовым слоем (n^2-n+1) -членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P [4]. С его помощью геометрически охарактеризованы связности,индуцированные полем одномерных направлений $\mathcal{N}_n$,не параллельных гиперплоскости P ,которые рассмотрены в работе [1].Показана также эквивалентность геометрических характеристик объектов касательной и нормальной линейных связностей с помощью конструкций центрального проектирования и параллельного перенесения ([5],[6]).

Отнесем комплекс K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q к реперу $R=\{A,\vec{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=\overline{1,n})$, где A -центр гиперквадрики.

Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа комплекса K_n [1],соответственно имеют вид:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0, \tag{1}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma \tag{2}$$

Диаметральные гиперплоскости P [1] описывают комплекс W_n, система дифференциальных уравнений которого в специализированном репере R [1] записывается следующим образом:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i\omega^n, \quad (i,j,k=\overline{1,n-1}), \qquad (3)$$

где компоненты Λ_{ij} и Λ_i фундаментального объекта первого порядка комплекса W_n являются функциями компонент фундаментального объекта второго порядка многообразия K_n.

Показано, что с комплексом K_n ассоциируется главное расслоение $G_{n^2-n+1}(K_n)$, базой которого является многообразие K_n, а типовым слоем - (n^2-n+1)-членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P. В главном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$ задается фундаментально-групповая связность по Г.Ф.Лаптеву [7]. На основании теоремы Картана-Лаптева [8] доказано, что связность в ассоциированном расслоении задается с помощью поля объекта связности:

$$\widetilde{\Gamma}=\{\Gamma^i_{jk},\Gamma^i_j,L^i_j,\Gamma^i,\Gamma_i,\Gamma\} \qquad (4)$$

на базе K_n.

Рассмотрим поле одномерных направлений $\mathcal{N}$, не параллельных гиперплоскости P, которое индуцируется комплексом K_n и задается следующим уравнением:

$$\overline{E}=\overline{e}_n+\lambda^i\overline{e}_i. \qquad (5)$$

Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор $\lambda=\{\lambda^i\}$ позволяют охватить компоненты объекта связности $\widetilde{\Gamma}$ по формулам:

$$\Gamma^i_{jk}=\Lambda_{jk}\lambda^i,\quad \Gamma^i_j=\Lambda_j\lambda^i,\quad L^i_j=-\lambda^i\lambda^k\Lambda_{kj},$$
$$\Gamma_i=-\lambda^j\Lambda_{ji},\quad \Gamma=-\lambda^i\Lambda_i,\quad \Gamma^i=-\lambda^i\lambda^j\Lambda_j, \qquad (6)$$

то есть в ассоциированном расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$ возникает внутренняя связность [9].

Т е о р е м а 1. Подобъект $\{\Gamma^i_{jk},\Gamma^i_j\}$ объекта связности $\widetilde{\Gamma}$ определяет проекцию (n-1)-мерных направлений $P+dP$ смежных [7] к P, на исходные направления P, параллельно направлению $\overline{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $d\overline{e}_i=\omega_i^j\overline{e}_j+\omega_i^n\overline{e}_n$. Из §3 работы 1 следует, что $\widetilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\lambda^i\omega^n_j$. Используя уравнение направления $\overline{E}$, получаем $d\overline{e}_i=\omega^n_i\overline{E}+\widetilde{\omega}^j_i\overline{e}_j$, откуда следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Подобъект $\{\Gamma_i,\Gamma\}$ объекта связности $\widetilde{\Gamma}$ определяет проекцию одномерных направлений $\overline{E}+d\overline{E}$, смежных к $\overline{E}$ на направление $\overline{E}$, параллельно (n-1)-мерным направлениям.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя внешним образом уравнение (5), получим:

$$d\overline{E}=(d\lambda^i+\lambda^j\omega^i_j+\omega^i_n)\overline{e}_i+(\omega^n_n+\lambda^i\omega^n_i)\overline{e}_n. \qquad (7)$$

Из §3 работы [1] вытекает, что $\widetilde{\omega}^n_n=\omega^n_n+\lambda^i\omega^n_i$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Подобъект $\{\Gamma^i_{jk},\Gamma^i_j\}$ объекта связности $\widetilde{\Gamma}$ характеризуется таким параллельным переносом вектора $\overline{e}=\mu^i\overline{e}_i$, при котором он смещается в направлении $\overline{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\delta\overline{e}=(\delta\mu^i+\mu^j\pi^i_j)\overline{e}_i+\mu^i\pi^n_i\overline{e}_n.$$

Из последней формулы и условия инвариантности вектора $\overline{e}$ следует: $d\mu^i=\mu^i_\alpha\omega^\alpha-\mu^j\omega^i_j$. Выражая формы ω^i_j через формы связности $\widetilde{\omega}^i_j$ и используя формулы (6), получаем:

$$d\overline{e}=\mu^i\omega^n_i\overline{E}+(d\mu^i+\mu^j\widetilde{\omega}^i_j)\overline{e}_i,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 4. Подобъект $\{\Gamma_i,\Gamma\}$ объекта связности $\widetilde{\Gamma}$ характеризуется таким параллельным переносом вектора $\overline{E}=\mu\overline{E}$, при котором он смещается параллельно гиперплоскости P.

Доказательство теоремы вытекает из § 3 работы [1], формул (7) и условия инвариантности вектора $\overline{E}_1$.

Итак, показана эквивалентность геометрических характеристик объектов касательной и нормальной линейных связностей с помощью конструкций центрального проектирования и параллельного перенесения ([5], [6]).

Т е о р е м а 5. Направление $\mathcal{N}$ инвариантно относительно преобразования параллельного переноса в связности $\overline{\Gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем формы связности $\tilde\omega^i_j$, $\tilde\omega^i_n$ и $\tilde\omega^n_n$ в уравнения оснащающего объекта $\{\lambda^i\}$. Тогда они принимают вид: $\Delta\lambda^i = \tilde\lambda^i_j\omega^j + \tilde\lambda^i\omega^n$, где ковариантный дифференциал [2] объекта $\{\lambda^i\}$ относительно связности $\overline{\Gamma}$ имеет вид:

$$\Delta\lambda^i = d\lambda^i + \tilde\omega^i_n + \lambda^j\tilde\omega^i_j - \lambda^i\tilde\omega^n_n, \tag{8}$$

а ковариантные производные $\tilde\lambda^i_j$, $\tilde\lambda^i$ определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\tilde\lambda^i_j = \lambda^i_j - L^i_j - \lambda^k\Gamma^i_{kj} + \lambda^i\Gamma_j; \quad \tilde\lambda^i = \lambda^i - \Gamma^i - \lambda^j\Gamma^i_j + \lambda^i\Gamma. \tag{9}$$

Одномерные направления $\mathcal{N}$, не параллельные гиперплоскости P, определяются вектором $\overline{E}$, дифференциал которого можно привести к виду:

$$d\overline{E} = \Delta\lambda^i\overline{e}_i + (\omega^n_n + \lambda^i\omega^n_i)\overline{E}, \tag{10}$$

откуда следует, что обращение ковариантного дифференциала $\Delta\lambda^i$ в ноль соответствует рассматриваемому в условии теоремы параллельному переносу направления $\mathcal{N}$.

Список литературы

1. К р е т о в М.В. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 35-39.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.- В кн.: Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979, с. 5-246.

3. Ш е в ч е н к о Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 126-130.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве.-Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 5, с. 319-334.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях.-Уч. зап. Тартуского ун-та, 1965, 177. с. 6-42.

6. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности: В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, 154-158.

7. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр. Моск. матем. общ-ва, 1953, т. 2, с. 275-382.

8. М а л а х о в с к и й В.С., Остиану Н.М. Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах.-Деп. ВИНИТИ АН СССР. М., 1979, № 3640-79 ДРП.

9. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.-Матем. сб., 1973, т. 91, №2, с. 211-233.

4 Зак. 1151